SOLUCIONES

1. (1 punto)
Razona si puede existir un grafo de orden 12, con 28 aristas y tal que todos sus vértices tengan grado 3 ó 4.

Sea x el número de vértices de grado 3. Con esto el grafo tendrá $12 - x$ vértices de grado 4.

Por tanto, $3x + 4(12 - x) = 2\cdot 28 = 56$, luego $x = -8$ que es imposible y no puede existir el grafo del enunciado.

2. (2,5 puntos)

a) Demuestra, por inducción la siguiente igualdad:

$1 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \cdots + (-1)^{\mathbf{n}+1}\mathbf{n}^2 = (-1)^{\mathbf{n}-1}\mathbf{n}(\mathbf{n} + 1)/2$ para todo número natural n.

b) Enuncia el Teorema Fundamental de la Aritmética y demuestra la parte de existencia.

a) Demostremos por inducción la igualdad pedida.

Para n = 1, se verifica porque $1 = 1\cdot 2/2$

La hipótesis de inducción es que el resultado es cierto para k

$1 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \cdots + (-1)^{\mathbf{k}+1}\mathbf{k}^2 = (-1)^{\mathbf{k}-1}\mathbf{k}(k + 1)/2$

Y debemos comprobar que también es cierto para k+1, es decir, que

$1 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \cdots + (-1)^{\mathbf{k}+1}\mathbf{k}^2 + (-1)^{\mathbf{k}+2}(\mathbf{k+1})^2 = (-1)^{\mathbf{k}}(\mathbf{k+1})(\mathbf{k} + 2)/2$

Operamos:
$1 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \cdots + (-1)^{\mathbf{k}+1}\mathbf{k}^2 + (-1)^{\mathbf{k}+2}(\mathbf{k+1})^2 = (-1)^{\mathbf{k}-1}\mathbf{k}(k + 1)/2 + (-1)^{\mathbf{k}+2}(\mathbf{k+1})^2 =$

$= (-1)^{\mathbf{k}} (k + 1) (k + 1 - k/2) = (-1)^{\mathbf{k}}(\mathbf{k+1})(\mathbf{k} + 2)/2$

Como queríamos demostrar

3. (2 puntos)

a) Calcula, si existen, el inverso de 16 y el inverso de 81 en Z_{45}
b) Hallar las dos últimas cifras de 7^{2014}

a) No existe el inverso de 81 porque $\text{mcd}(81, 45) = 9 \neq 1$
Aplicando el algoritmo de Euclides se obtiene el inverso de 16 que es 31

b) Las dos últimas cifras de 7^{2014} se obtienen al calcular 7^{2014} (mod 100)
Por el teorema de Euler $7^{\Phi(100)} \equiv 1 \pmod{100}$
Como $\Phi(100) = 40$ y $2014 = 40\cdot 50 + 14$, resulta que $7^{2014} \equiv 7^{14} \pmod{100}$
Calculemos este valor:
$7^{14} = 7^8 \cdot 7^4 \cdot 7^2$
$7^2 = 49$, $7^4 \equiv 1 \pmod{100}$, $7^8 \equiv 1 \pmod{100}$, luego $7^{14} \equiv 49 \pmod{100}$
Y las dos últimas cifras pedidas son 49

4. (1,5 puntos)
Resuelve el sistema de congruencias

$$\begin{cases} 4x \equiv 5 \pmod{17} \\ 12x \equiv 28 \pmod{46} \\ 7x \equiv 14 \pmod{30} \end{cases}$$

Operamos primero en cada ecuación para simplificar

En la primera ecuación multiplicamos por 4 y resulta $-x \equiv 3 \pmod{17}$
En la segunda primero se aplica la regla de simplificación $3x \equiv 7 \pmod{23}$ y multiplicando por 8 resulta, $x \equiv 10 \pmod{13}$
Finalmente, simplificamos la tercera $x \equiv 2 \pmod{30}$
Como no se puede aplicar el teorema de los restos, resolvemos el sistema directamente.

De la tercera ecuación se tiene que $x = 2 + 30k$, sustituimos en la segunda
$2 + 30k \equiv 10 \pmod{23}$ luego, $7k \equiv 8 \pmod{23}$ resolvemos multiplicando por 10
$k \equiv 11 \pmod{23}$
Así $x = 2 + 30(11 + 23j) = 332 + 690j$
Llevamos este valor a la primera ecuación $332 + 690j \equiv -3 \pmod{17}$
$-8 + 78j \equiv 1 - 3 \pmod{17}$ luego $10j \equiv 5 \pmod{17}$ que simplificando $2j \equiv 1 \pmod{17}$,
Es decir, $j \equiv 9 \pmod{17}$
Por tanto $x = 332 + 690(9 + 17h) = 6542 + 11730h \equiv 6542 \pmod{11730}$

5. (2 puntos)

Dibuja el diagrama de Hasse del conjunto ordenado $(D_{126}, |)$. Dado el subconjunto $A = \{2, 6, 9, 14, 18, 42\}$, halla los elementos maximales, minimales, cotas superiores e inferiores, supremo, ínfimo, máximo y mínimo, si existen, de A.

Maximales $\{18, 42\}$, minimales $\{2, 9\}$. No hay ni máximo ni mínimo.
Cotas superiores 126, que es el supremo
Cotas inferiores 1, que es el ínfimo

6. (1 punto)

Determinar los dígitos x e y del número n = 59x7y8 sabiendo que es divisible por 123.

Sabemos que $59x7y8 \equiv 0 \pmod{123}$, luego $590708 + 10000x + 10y \equiv 0 \pmod{123}$, es decir,
$62 + 16x + 10y \equiv 0 \pmod{123}$
Y simplificando por 2 tenemos que $31 + 8x + 5y \equiv 0 \pmod{123}$

Ahora utilizamos que x e y son cifras, es decir, $0 \le x, y \le 9$. Con esto la suma anterior está comprendida entre 31 y 148. Como 123 es el único múltiplo de 123 en ese intervalo resulta que:
$31 + 8x + 5y = 123$, o sea, $8x + 5y = 92$

Resolvamos esa ecuación diofántica.
Como $\text{mcd}(8,5) = 1 = 8 \cdot 2 + 5 \cdot (-3)$, la ecuación tiene solución y una solución particular es:

$x_0 = 2 \cdot 92 = 184$, $y_0 = (-3) \cdot 92 = -276$

Todas las soluciones son de la forma: $\left.\begin{array}{l} x = 184 + 5t \\ y = -276 - 8t \end{array}\right\}$

Aplicando que $0 \le x, y \le 9$ resulta que $t = -35$, luego $x = 9$, $y = 4$.
El número inicial es $n = 599748$

$599748 = 123 \cdot 4876$